Endliche analytische Homomorphismen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades der

Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Georg - August - Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Siegfried Bosch

aus Solingen

Göttingen 1967

ENDLICHE ANALYTISCHE HOMOMORPHISMEN

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Georg-August - Universität

zu Göttingen

vorgelegt von

Siegfried Bosch

aus Solingen

Göttingen 1967

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Referent: Professor Dr. R. Remmert

Korreferent: Professor Dr. H. Grauert

Tag der mündlichen Prüfung: 5. Mai 1967

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 4

1. Bezeichnungen und Definitionen 6

2. Endliche und quasiendliche analytische Homomorphismen 8

3. Endliche und freie analytische Homomorphismen 15

Literatur 21

Einleitung

Die Weierstraßsche Formel, die zuerst von Späth bewiesen wurde, ist in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher von großer Bedeutung. Man braucht sie u. a., um zu zeigen, daß Potenzreihenalgebren über bewerteten Körpern noethersch und faktoriell sind.

In der vorliegenden Arbeit soll die Weierstraßsche Formel verallgemeinert werden. Nach einigen Vorbereitungen im Abschnitt 1 wird im Abschnitt 2 ein neuer Beweis für den folgenden Satz gegeben, der auf Serre zurückgeht (vgl. [1]):

Ein analytischer Homomorphismus ist genau dann endlich, wenn er quasiendlich ist.

Dieser Satz enthält die Weierstraßsche Formel in folgender Form:

Der analytische Homomorphismus

$$\varphi : k\langle X_1,\ldots,X_{n-1}\rangle \longrightarrow k\langle X_1,\ldots,X_n\rangle/(g) ,$$

wo g bzgl. X_n allgemein von der Ordnung $s > 0$ ist, ist endlich, und die Restklassen der Elemente $X_n^0, X_n^1,\ldots,X_n^{s-1}$ modulo g bilden ein minimales Erzeugendensystem von $k\langle X_1,\ldots,X_n\rangle/(g)$ bzgl. φ.

Die Freiheit von φ, d. h. die Eindeutigkeit der Weierstraßschen Formel, ergibt sich leicht durch eine

Zusatzbetrachtung, z. B. durch Induktion nach n.

Im Abschnitt 3 wird allgemeiner untersucht, wann ein endlicher analytischer Homomorphismus

$$\varphi : k\langle X_1,\ldots,X_n\rangle \longrightarrow A$$

(A sei eine beliebige analytische Algebra) frei ist. Es ergibt sich, was man von der Theorie der lokalen Ringe her erwartet:

φ ist genau dann frei, wenn A ein n-dimensionaler Macaulay-Ring ist, bzw. was damit äquivalent ist, wenn es irgendeinen endlichen und freien analytischen Homomorphismus $k\langle X_1,\ldots,X_n\rangle \longrightarrow A$ gibt.

Ich möchte Herrn Professor Remmert für die Anregung zu dieser Arbeit danken.

1. Bezeichnungen und Definitionen

k sei stets ein bewerteter Körper. Die Bewertung braucht nicht vollständig zu sein. Mit $k\{X_1,\dots,X_n\}$ bezeichnen wir die Algebra der formalen Potenzreihen in n Unbestimmten mit Koeffizienten in k. Ist $t\in R$, $t>0$,

$$a=\sum_0^\infty a_{\nu_1\dots\nu_n}X_1^{\nu_1}\dots X_n^{\nu_n}\in k\{X_1,\dots,X_n\}\ ,$$

so setzen wir

$$\|a\|_t := \sum_0^\infty |a_{\nu_1\dots\nu_n}|\,t^{\nu_1+\dots+\nu_n}\ .$$

$\|\ \|_t$ ist eine Norm auf der Algebra

$$B_t^n := \left\{a\in k\{X_1,\dots,X_n\}\ \middle|\ \|a\|_t<\infty\right\}\ .$$

Mit

$$K_n := k\langle X_1,\dots,X_n\rangle := \bigcup_{t>0} B_t^n$$

erhalten wir die Algebra der konvergenten Potenzreihen in n Unbestimmten. K_n besitzt genau ein maximales Ideal, es sei mit $\underline{m}_n$ bezeichnet.

Eine k-Algebra $A\neq 0$ heißt analytische Algebra, falls es einen k-Algebraepimorphismus $K_n\longrightarrow A$ gibt. Analytische Algebren besitzen genau ein maximales Ideal und haben zu k isomorphe Restklassenkörper. k-Algebrahomomorphismen zwischen solchen Algebren nennen wir analytische Homomorphismen. Ist $\varphi: A\longrightarrow A'$

ein analytischer Homomorphismus zwischen zwei analytischen Algebren A und A' mit den maximalen Idealen $\underline{m}$ und $\underline{m}'$, so ist φ lokal und definiert A' auf kanonische Weise als A-Modul. φ heißt endlich bzw. frei, falls A' ein endlicher bzw. freier A-Modul ist. φ heißt quasiendlich, falls $A'/\varphi(\underline{m})A'$ ein endlichdimensionaler k-Vektorraum ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn es ein $r \in \mathbb{N}$ gibt mit $\underline{m}'^{r} \subseteq \varphi(\underline{m})A'$.

2. Endliche und quasiendliche analytische Homomorphismen

Im folgenden Satz behandeln wir analytische Homomorphismen $\varphi : K_m \longrightarrow K_n$. Zur Vereinfachung schreiben wir Potenzreihen aus K_n in der Form $\sum_0^\infty a_\nu X^\nu$, indem wir $\nu := (\nu_1,\dots,\nu_n)$ und $X^\nu := X_1^{\nu_1}\dots X_n^{\nu_n}$ setzen. Den Gesamtgrad eines Monoms $X^\nu = X_1^{\nu_1}\dots X_n^{\nu_n}$ bezeichnen wir mit $|\nu| := \sum_1^n \nu_i$.

SATZ 1: K_n sei durch einen analytischen Homomorphismus $\varphi : K_m \longrightarrow K_n$ als K_m-Modul definiert, und es gelte $\underline{m}_n^r \subseteq \varphi(\underline{m}_m)K_n$ für ein $r \in \mathbb{N}$. Dann bilden die Monome $X^\nu \in K_n$ mit $|\nu| < r$ ein Erzeugendensystem von K_n.

Genauer: Es existieren Konstanten $t_o, t_1 \in \mathbb{R}$, $0 < t_o \leq 1$, $0 < t_1$, so daß für $t \in \mathbb{R}$, $0 < t \leq t_o$, jedes $b \in B_t^n$ eine Darstellung

$$b = \sum_{|\nu|<r} X^\nu \varphi(b_\nu)$$

gestattet mit $b_\nu \in K_m$ und

$$\|b_\nu\|_{t'} \leq 2t^{1-r}\|b\|_t , \qquad t' := t_1 t^r .$$

Die Monome $X^\nu \in K_n$ mit $|\nu| < r$ numeriere man in irgendeiner Reihenfolge durch und bezeichne sie mit f_κ, $\kappa = 1,\dots,s$. Weiter sei $u_\mu := \varphi(X_\mu)$, $\mu = 1,\dots,m$. Zu den Monomen $X^\nu \in K_n$ mit $|\nu| = r$ wähle man Elemente $d_\mu^\nu \in K_n$, $\mu = 1,\dots,m$, so daß gilt:

$$X^{\nu} = \sum_{\mu=1}^{m} d_{\mu}^{\nu} u_{\mu} .$$

$t_o \in R$, $0 < t_o \leq 1$, sei so klein gewählt, daß

$$L := \max_{\nu,\mu} \|d_{\mu}^{\nu}\|_{t_o} < \infty .$$

Wir beweisen zunächst folgenden

HILFSSATZ: Sei $a \in B_t^n$, $0 < t \leq t_o$. Dann gibt es eine Darstellung

$$a = \sum_{1}^{s} c_{\kappa} f_{\kappa} + \sum_{1}^{m} d_{\mu} u_{\mu}$$

mit

$$c_{\kappa} \in k, \quad |c_{\kappa}| \leq t^{1-r} \|a\|_t , \quad \kappa = 1,\ldots,s$$

und

$$d_{\mu} \in K_n, \quad \|d_{\mu}\|_t \leq t^{-r} L \|a\|_t , \quad \mu = 1,\ldots,m .$$

Beweis: Das Element a läßt sich eindeutig schreiben in der Form $a = \sum_{1}^{s} c_{\kappa} f_{\kappa} + \sum_{|\nu|\geq r} a_{\nu} X^{\nu}$ mit $c_{\kappa}, a_{\nu} \in k$, und es ist $|c_{\kappa}| \leq t^{1-r} \|a\|_t$, $\kappa = 1,\ldots,s$.

Zu den Monomen $X^{\nu} \in K_n$ mit $|\nu| \geq r$ seien n-Tupel nichtnegativer ganzer Zahlen $\varrho(\nu)$ gewählt, derart daß $|\varrho(\nu)| = r$ und $\nu - \varrho(\nu) \geq 0$. Dann gilt

$$\sum_{|\nu|\geq r} a_{\nu} X^{\nu} = \sum_{|\nu|\geq r} a_{\nu} X^{\nu-\varrho(\nu)} \sum_{\mu=1}^{m} d_{\mu}^{\varrho(\nu)} u_{\mu} = \sum_{1}^{m} d_{\mu} u_{\mu}$$

mit

$$d_{\mu} := \sum_{|\nu|\geq r} a_{\nu} X^{\nu-\varrho(\nu)} d_{\mu}^{\varrho(\nu)} , \quad \mu = 1,\ldots,m .$$

Es folgt

$$\|d_{\mu}\|_t \leq \sum_{|\nu|\geq r} |a_{\nu}| \, t^{|\nu|-r} \, \|d_{\mu}^{\varrho(\nu)}\|_t \leq t^{-r} L \|a\|_t$$

und

$$a = \sum_1^s c_\kappa f_\kappa + \sum_1^m d_\mu u_\mu .$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir kommen jetzt zum Beweis von Satz 1. Sei $b \in K_n$, $M := \|b\|_t < \infty$, $0 < t \leq t_o$. Wir konstruieren durch Induktion nach j Polynome $P_j^\kappa \in k[X_1,\dots,X_m]$, $\kappa = 1,\dots,s$, $j = 0,1,\dots$, mit folgenden Eigenschaften:

1) P_j^κ ist homogen vom Grade j, falls $P_j^\kappa \neq 0$.

2) $\|P_j^\kappa\|_{t'} \leq 2^{-j} t^{1-r} M$ mit $t' := (2mL)^{-1} t^r$.

3) Es existieren Elemente $d_{\mu_1\cdots\mu_{j+1}} \in K_n$ mit $\|d_{\mu_1\cdots\mu_{j+1}}\|_t \leq t^{-(j+1)r} L^{j+1} M$, $\mu_1,\dots,\mu_{j+1} = 1,\dots,m$, so daß gilt:

$$b = \sum_{\kappa=1}^s f_\kappa \sum_{i=0}^{j} P_i^\kappa(u_1,\dots,u_m) + \sum_{\mu_1\cdots\mu_{j+1}}^{1\dots m} d_{\mu_1\cdots\mu_{j+1}} u_{\mu_1}\cdots u_{\mu_{j+1}} .$$

Der Induktionsanfang folgt sofort aus dem Hilfssatz. Ist $b = \sum_1^s c_\kappa f_\kappa + \sum_1^m d_\mu u_\mu$ die dort konstruierte Darstellung, so setze man $P_o^\kappa := c_\kappa$, $\kappa = 1,\dots,s$. Die Eigenschaften 1), 2), 3) sind dann erfüllt.

Seien $P_o^\kappa,\dots,P_{j-1}^\kappa$, $\kappa = 1,\dots,s$, bereits konstruiert ($j > 0$). Also gilt

$$b = \sum_{\kappa=1}^s f_\kappa \sum_{i=0}^{j-1} P_i^\kappa(u_1,\dots,u_m) + \sum_{\mu_1\cdots\mu_j}^{1\dots m} d_{\mu_1\cdots\mu_j} u_{\mu_1}\cdots u_{\mu_j}$$

mit $d_{\mu_1\cdots\mu_j} \in K_n$, $\|d_{\mu_1\cdots\mu_j}\|_t \leq t^{-jr} L^j M$. Auf Grund des Hilfssatzes gestattet jedes $d_{\mu_1\cdots\mu_j}$ eine Darstellung

$$d_{\mu_1\cdots\mu_j} = \sum_{\kappa=1}^s c_{\mu_1\cdots\mu_j\kappa} f_\kappa + \sum_{\mu_{j+1}=1}^m d_{\mu_1\cdots\mu_{j+1}} u_{\mu_{j+1}}$$

mit

$$c_{\mu_1\cdots\mu_j\kappa} \in k,\quad |c_{\mu_1\cdots\mu_j\kappa}| \leq t^{1-(j+1)r} L^j M,\quad \kappa = 1,\ldots,s,$$

$$d_{\mu_1\cdots\mu_{j+1}} \in K_n,\quad \| d_{\mu_1\cdots\mu_{j+1}} \|_t \leq t^{-(j+1)r} L^{j+1} M.$$

Sei nun

$$P_j^\kappa := \sum_{\mu_1\cdots\mu_j}^{1\ldots m} c_{\mu_1\cdots\mu_j\kappa} X_{\mu_1}\cdots X_{\mu_j},\quad \kappa = 1,\ldots,s.$$

P_j^κ ist ein homogenes Polynom aus $k[X_1,\ldots,X_m]$, vom Grade j, falls $P_j^\kappa \neq 0$, und es gilt

$$\|P_j^\kappa\|_{t'} \leq m^j t^{1-(j+1)r} L^j M (2mL)^{-j} t^{rj} = 2^{-j} t^{1-r} M\ ,$$

$$b = \sum_{\kappa=1}^{s} f_\kappa \sum_{i=0}^{j} P_i^\kappa(u_1,\ldots,u_m) + \sum_{\mu_1\cdots\mu_{j+1}}^{1\ldots m} d_{\mu_1\cdots\mu_{j+1}} u_{\mu_1}\cdots u_{\mu_{j+1}}$$

mit den geforderten Abschätzungen für die Elemente $d_{\mu_1\cdots\mu_{j+1}}$. Der Induktionsschluß ist also vollendet.

Wenn wir

$$b_\kappa := \sum_{j=0}^{\infty} P_j^\kappa$$

setzen, so folgt $b_\kappa \in k\{X_1,\ldots,X_m\}$,

$$\|b_\kappa\|_{t'} = \sum_{j=0}^{\infty} \|P_j^\kappa\|_{t'} \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} t^{1-r} M = 2t^{1-r}\|b\|_t\ ,$$

d. h. insbesondere $b_\kappa \in K_m$, $\kappa = 1,\ldots,s$. Sei $t'' \in R$, $0 < t'' \leq t$, so daß $\|u_\mu\|_{t''} \leq (2mL)^{-1} t^r$, $\mu = 1,\ldots,m$. Aus dem Induktionsbeweis erhalten wir dann für jede ganze Zahl $j \geq 0$ die Abschätzung

$$\| b - \sum_{\kappa=1}^{s} f_\kappa \sum_{i=0}^{j} P_i^\kappa(u_1,\ldots,u_m) \|_{t''} =$$
$$= \| \sum_{\mu_1\cdots\mu_{j+1}}^{1\ldots m} d_{\mu_1\cdots\mu_{j+1}} u_{\mu_1}\cdots u_{\mu_{j+1}} \|_{t''} \leq 2^{-(j+1)} M,$$

d. h. es besteht in K_n die Beziehung

$$b = \sum_{\kappa=1}^{s} f_\kappa \sum_{i=0}^{\infty} P_i^\kappa(u_1,\ldots,u_m) = \sum_{1}^{s} f_\kappa \varphi(b_\kappa).$$

Setzen wir noch $t_1 := (2mL)^{-1}$, so gilt $t' = t^r t_1$, und Satz 1 ist bewiesen.

Es sei $\varphi : K_m \longrightarrow K_n$ ein analytischer Homomorphismus. Bezeichnen wir mit $d\varphi$ (Differential von φ) die von φ induzierte k-lineare Abbildung $\underline{m}_m/\underline{m}_m^2 \longrightarrow \underline{m}_n/\underline{m}_n^2$, so gilt

KOROLLAR 1: a) φ ist injektiv bzw. surjektiv, falls $d\varphi$ injektiv bzw. surjektiv ist.

b) φ ist genau dann bijektiv, wenn $d\varphi$ bijektiv ist (Jacobischer Umkehrsatz).

Beweis: Ist $d\varphi$ surjektiv, so gilt $\underline{m}_n = \varphi(\underline{m}_m)K_n + \underline{m}_n^2 \cdot \underline{m}_n$ ist ein endlicher K_n-Modul, also ergibt das Lemma von Nakayama: $\underline{m}_n = \varphi(\underline{m}_m)K_n$. Nach Satz 1 folgt $K_n = \varphi(K_m)$, d. h. φ ist surjektiv.

Sei $d\varphi$ bijektiv. Dann gilt $m = n$, und φ ist surjektiv. Man wähle einen analytischen Homomorphismus $\sigma : K_n \longrightarrow K_n$ mit $\varphi \circ \sigma = \mathrm{id}$. σ ist dann injektiv und sogar bijektiv, da $d\sigma$ insbesondere surjektiv ist. Mithin ist φ ebenfalls bijektiv. Umgekehrt ist mit φ trivialerweise auch $d\varphi$ bijektiv.

Sei $d\varphi$ injektiv. Dann gilt $n \geq m$. Man wähle die Numerierung der Unbestimmten in K_n so, daß das Differential $d(\pi \circ \varphi)$ bijektiv wird, $\pi : K_n \longrightarrow K_n/(X_{m+1},\ldots,X_n)$

sei der Quotientenhomomorphismus. Dann ist $\pi \circ \varphi$ bijektiv, also insbesondere φ injektiv.

Von jetzt ab setzen wir, insbesondere um Induktionsbeweise einfacher gestalten zu können, $K_o := k$. $\underline{m}_o := (0)$ ist dann das maximale Ideal in K_o. Ein Element $a = \sum_0^{\infty} a_\nu X_n^\nu \in K_n$ mit $a_o, a_1, \ldots \in K_{n-1}$, $n > 0$, heißt X_n-allgemein von der Ordnung $s > 0$, falls $a_o, \ldots, a_{s-1} \in \underline{m}_{n-1}$, $a_s \notin \underline{m}_{n-1}$. Wir werden benutzen, daß zu jedem von Null verschiedenen Element $a \in K_n$ ein analytischer Automorphismus $\sigma : K_n \longrightarrow K_n$ existiert, so daß $\sigma(a)$ bzgl. X_n allgemein ist.

KOROLLAR 2: Sei $a \in \underline{m}_n$, $a \neq 0$, $n > 0$ und $\sigma : K_n \longrightarrow K_n$ ein analytischer Automorphismus, so daß $\sigma(a)$ bzgl. X_n allgemein ist von der Ordnung $s > 0$. Dann ist der analytische Homomorphismus $\tau : K_n \longrightarrow K_n$, definiert durch

$$\tau(X_\nu) := \sigma^{-1}(X_\nu), \quad \nu = 1, \ldots, n-1,$$
$$\tau(X_n) := a$$

endlich.

Beweis: Da

$$\sigma(a) K_n / \sum_1^{n-1} X_\nu K_n = X_n^s K_n / \sum_1^{n-1} X_\nu K_n ,$$

folgt $\tau(\underline{m}_n) K_n = \sigma^{-1}(X_1, \ldots, X_{n-1}, \sigma(a)) =$
$= \sigma^{-1}(X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n^s) \supseteq \underline{m}_n^s$, d. h. τ ist quasiendlich und somit endlich nach Satz 1.

Aus Korollar 2 erhält man in bekannter Weise

KOROLLAR 3: K_n ist noethersch

und hieraus in Verbindung mit Satz 1 (vgl. [1])

KOROLLAR 4: Ein analytischer Homomorphismus ist genau dann endlich, wenn er quasiendlich ist.

3. Endliche und freie analytische Homomorphismen

In Korollar 1 haben wir gesehen, daß ein endlicher analytischer Homomorphismus $K_m \longrightarrow K_n$ jedenfalls dann frei ist, wenn sein Differential bijektiv ist. In diesem Abschnitt wollen wir eine notwendige und hinreichende Bedingung angeben, die die Freiheit eines endlichen analytischen Homomorphismus $K_n \longrightarrow A$ garantiert, A sei dabei eine beliebige analytische Algebra. Man kann dieses Problem im Rahmen der allgemeinen Theorie der lokalen Ringe behandeln, wenn man die Ergebnisse aus [2] verwendet. Wir wollen jedoch einen anderen Weg gehen.

Es sei B ein (noetherscher) lokaler Ring und A ein endlicher B-Modul. $\underline{m}$ sei das maximale Ideal von B. Wir nennen ein endliches System $\{f_1,\dots,f_r\} \subseteq \underline{m}$ A-<u>regulär</u>, wenn $f_\nu a \in \sum_1^{\nu-1} f_i A$ mit $a \in A$ stets $a \in \sum_1^{\nu-1} f_i A$ zur Folge hat, d. h. wenn f_ν kein Nullteiler bzgl. A modulo $\sum_1^{\nu-1} f_i A$ ist, $\nu = 1,\dots,r$. Es gilt mit den soeben eingeführten Bezeichnungen

BEMERKUNG 1: <u>Das System</u> $\{f_1,\dots,f_r\} \subseteq \underline{m}$ <u>sei</u> A-<u>regulär, und es sei</u> $A/\sum_1^r f_\nu A$ <u>frei über</u> $B/\sum_1^r B f_\nu$. <u>Dann ist</u> A <u>ein freier</u> B-<u>Modul</u>.

Beweis durch Induktion nach r: Im Falle r = 1 wähle man Elemente $g_1,\dots,g_s \in A$, so daß deren Rest-

klassen modulo f_1A eine Basis von A/f_1A über B/Bf_1 bilden. Es folgt

$$A = \sum_1^s Bg_\nu + f_1A ,$$

also nach dem Lemma von Nakayama

$$A = \sum_1^s Bg_\nu ,$$

denn A ist ein endlicher B-Modul. Angenommen es gibt Elemente $a_1,\ldots,a_s \in B$, nicht sämtlich null, so daß $\sum_1^s a_\nu g_\nu = 0$ gilt. Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a_1 \not\equiv 0(f_1)$ annehmen, denn f_1 ist kein Nullteiler bzgl. A, und es gilt $\bigcap_\nu \underline{m}^\nu = 0$. Aus der Relation $\sum_1^s \bar{a}_\nu \bar{g}_\nu = 0$ ($\bar{a}_\nu$ bzw. $\bar{g}_\nu$ sei die Restklasse von a_ν modulo Bf_1 bzw. von g_ν modulo f_1A) folgt jedoch $\bar{a}_1 = 0$ im Widerspruch zur Wahl von a_1. Also ist A ein freier B-Modul. Zum Induktionsschluß sei $r > 1$. Die Restklasse von f_r modulo $\sum_1^{r-1} Bf_\nu$ ist kein Nullteiler bzgl. $A/\sum_1^{r-1} f_\nu A$, also ist $A/\sum_1^{r-1} f_\nu A$ frei über $B/\sum_1^{r-1} Bf_\nu$ nach dem eben Bewiesenen, d. h. A ist frei über B nach Induktionsvoraussetzung.

Wir brauchen nun noch einige Eigenschaften analytischer Homomorphismen $\varphi : K_n \longrightarrow A$. Eine solche Abbildung φ induziert im Falle $n > 0$ in kanonischer Weise einen analytischen Homomorphismus $K_{n-1} \longrightarrow A/\varphi(X_n)A$, den wir im folgenden mit φ' bezeichnen werden. Es ist sofort einzusehen, daß mit φ auch φ' quasiendlich bzw. endlich bzw. frei ist.

Unter Verwendung von Dimensionstheorie verifiziert man sofort

BEMERKUNG 2: A sei eine analytische Algebra und $\varphi : K_n \longrightarrow A$ ein endlicher und injektiver analytischer Homomorphismus. Ist $\psi : K_m \longrightarrow A$ ein weiterer endlicher analytischer Homomorphismus, so gilt $m \geq n$.

BEMERKUNG 3: $\varphi, \psi : K_n \longrightarrow A$ seien endliche analytische Homomorphismen, $n>0$, φ sei zusätzlich injektiv. Dann enthält $\psi(X_n)A \cap \varphi(K_n)$ ein von Null verschiedenes Element.

Beweis: Angenommen es gilt $\psi(X_n)A \cap \varphi(K_n) = (0)$, so induziert φ einen endlichen und injektiven analytischen Homomorphismus $K_n \longrightarrow A/\psi(X_n)A$. Andererseits hat man den endlichen analytischen Homomorphismus $\psi' : K_{n-1} \longrightarrow A/\psi(X_n)A$, was im Widerspruch zu Bemerkung 2 steht.

BEMERKUNG 4: $\varphi, \psi : K_n \longrightarrow A$ seien endliche analytische Homomorphismen, φ sei zusätzlich frei. Falls $n>1$, so gibt es analytische Homomorphismen $\chi, \varsigma : K_n \longrightarrow A$ mit den Eigenschaften:

a) χ ist endlich,

b) ς ist endlich und frei,

c) es gilt $\chi(X_1) = \varsigma(X_1)$, $\chi(X_n) = \psi(X_n)$.

Beweis: Nach Bemerkung 3 gibt es von Null verschiedene Elemente $a \in \underline{m}_n$, $b \in A$, so daß $\varphi(a) = \psi(X_n)b$.

Sei $\tau : K_n \longrightarrow K_n$ der in Korollar 2 konstruierte endliche analytische Homomorphismus mit $\tau(X_n) = a$, $\sigma : K_n \longrightarrow K_n$ sei der zugehörige Automorphismus von K_n. Der analytische Homomorphismus $\varphi\circ\tau : K_n \longrightarrow A$ ist wegen der Endlichkeit von φ und τ endlich, also quasiendlich, und es gilt

$$\varphi\circ\tau(X_n) = \varphi(a) = \psi(X_n)b \ .$$

Daher ist auch der analytische Homomorphismus $\chi : K_n \longrightarrow A$, definiert durch

$$\chi(X_\nu) := \varphi\circ\tau(X_\nu) = \varphi\circ\sigma^{-1}(X_\nu) \ , \ \nu = 1,\ldots,n-1 \ ,$$
$$\chi(X_n) := \psi(X_n) \ ,$$

quasiendlich, also endlich. Setzen wir $\varrho := \varphi\circ\sigma^{-1}$, so sind χ und ϱ die gesuchten Abbildungen.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir zu

SATZ 2: Es sei A eine analytische Algebra und $\varphi : K_n \longrightarrow A$ ein endlicher und freier analytischer Homomorphismus. Ist $\psi : K_n \longrightarrow A$ ein weiterer endlicher analytischer Homomorphismus, so ist ψ frei.

Beweis durch Induktion nach n: Der Fall n = 0 ist trivial. Im Falle $n>0$ sei $\psi : K_n \longrightarrow A$ ein beliebiger endlicher analytischer Homomorphismus. Es ist zu zeigen, daß ψ frei ist. φ ist frei, also ist 0 der einzige Nullteiler von A, der in $\varphi(K_n)$ enthalten ist. Mit Bemerkung 3 erhält man hieraus, daß $\psi(X_n)A$

nicht ausschließlich aus Nullteilern besteht, d. h. daß $\Psi(X_n)$ kein Nullteiler in A ist. Weiter ist Ψ' frei. Falls n = 1, so ist dies unmittelbar einzusehen. Im Falle $n > 1$ darf man auf Grund von Bemerkung 4 $\varphi(X_n) = \Psi(X_n)$ annehmen, d. h. Ψ' ist frei nach Induktionsvoraussetzung, denn φ' ist frei. Die Freiheit von Ψ folgt damit aus Bemerkung 1.

Als Folgerung ergibt sich aus Satz 2 in Verbindung mit Bemerkung 2

KOROLLAR 5: Ein endlicher analytischer Homomorphismus $K_m \longrightarrow K_n$ ist genau dann frei, wenn m = n ist.

Um den Zusammenhang mit der Theorie der lokalen Ringe herzustellen, beweisen wir

SATZ 3: Ein endlicher analytischer Homomorphismus $\varphi : K_n \longrightarrow A$ ist genau dann frei, wenn das System $\{X_1,\ldots,X_n\}$ A-regulär ist.

Beweis: Sei φ frei. Dann sind auch die Abbildungen $\varphi',\varphi'',\ldots,\varphi^{(n)}$ frei. Die Freiheit von $\varphi^{(n-\nu)}$ besagt insbesondere, daß $\varphi(X_\nu)$ kein Nullteiler modulo $\sum_{\nu+1}^{n}\varphi(X_i)A$ ist, $\nu = 1,\ldots,n$, d. h. das System $\{X_n,\ldots,X_1\}$ ist A-regulär. Damit ist die eine Richtung gezeigt, denn man darf die Numerierung der Unbestimmten in K_n beliebig wählen. Die andere Richtung folgt sofort aus Bemerkung 1.

In der Literatur finden sich mehrere äquivalente Definitionen für Macaulay-Ringe. Eine gebräuchliche ist z. B. die in [3], Appendix 6, gegebene. Sie ist, falls es sich um analytische Algebren handelt, auf Grund von Korollar 4, Bemerkung 2 und Satz 3, mit der folgenden äquivalent:

Eine analytische Algebra A heißt Macaulay-Ring der Dimension n, falls es einen endlichen und freien analytischen Homomorphismus $K_n \longrightarrow A$ gibt.

Mit Satz 2 haben wir daher folgendes Resultat:

Ein endlicher analytischer Homomorphismus $K_n \longrightarrow A$ ist genau dann frei, wenn A ein Macaulay-Ring der Dimension n ist.

Literatur

[1] Houzel, Ch.: Géométrie analytique locale I, Séminaire H. Cartan 13, 1960/61, exp. 18.

[2] Serre, J.-P.: Sur la dimension homologique des anneaux et des modules noethériens, Proceedings of the International Symposium, Tokyo - Nikko 1955, Science Council of Japan, Tokyo, 1956, p. 175 - 189.

[3] Zariski, O. and P. Samuel: Commutative Algebra II, van Nostrand, New York, 1960.

Lebenslauf

Am 29. 9. 1944 wurde ich als Sohn des Oberstudienrats Eugen Bosch und seiner Ehefrau Eva-Maria geb. Spehr in Wuppertal geboren. Die Schule besuchte ich ab Ostern 1951 in Solingen und bestand am 21. 2. 1964 die Reifeprüfung am dortigen Gymnasium Schwertstraße. Seit dem Sommersemester 1964 studiere ich an der Universität Göttingen, wo ich mich nach der Vordiplomprüfung im Februar 1966 unter Anleitung von Herrn Professor Dr. R. Remmert u. a. mit komplexer Analysis beschäftigte. Die Diplomprüfung in Mathematik legte ich am 17. 2. 1967 ab.

Bönecke-Druck 3392 Clausthal-Z. 29